Rombaldi
Gourdon
Perrin (dev 1)

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

On considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I. Formes linéaires et dualité

1. Définition

Définition 1.1 On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E sur $\mathbb{K}$.

Définition - Proposition 1.2 L'ensemble $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E, est noté E^*. Il s'agit d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel appelé espace dual.

Notation 1.3 Si $x \in E$ et $\varphi \in E^*$, on note $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$

Exemples 1.4

- si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E alors : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $p_j : x = \sum x_i e_i \longmapsto x_j \in E^*$
- $\mathrm{tr} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathrm{tr}\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$
- $x \longmapsto \langle a, x \rangle$ où $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ préhilbertien et $a \in E$

2. Hyperplans [Rom]

Définition 1.5 On appelle hyperplan de E le noyau d'une forme linéaire sur E, non nulle.

Lemme 1.6 Soit $H \subset E$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- H est un hyperplan de E
- il existe $a \in E$ tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}\, a$
- il existe $a_1, \dots, a_n \in E$ non tous nuls tels que $H = \left\{ \sum x_i e_i \mid \sum a_i x_i = 0 \right\}$

Proposition 1.7 Un hyperplan de E est de dimension $n-1$. Et réciproquement.

Exemple 1.8

$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \mid x+y+z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}^3$

$\mathbb{K}^3 = H \oplus \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ $\qquad H = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Proposition 1.9 Soient $\phi_1, \phi_2 \in E^*$ alors $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$ si et seulement si ϕ_1 et ϕ_2 sont liées sur E^*.

Application

développement 1

Théorème 1.10 Soit E euclidien. Tout élément $u \in O(E)$ est le produit de $R = \mathrm{rg}(u - \mathrm{id})$ réflexions orthogonales.

Théorème 1.11 Si E est euclidien et $n \geq 3$, alors $SO(E)$ est engendré par les renversements.

Lemme 1.12 Soit E euclidien avec $n \geq 3$. Alors pour τ_1, τ_2 réflexions, il existe des renversements σ_1, σ_2 tels que $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

II. Structure du dual

1. Base duale [Gou]

Définition 2.1 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la forme linéaire e_i^* définie par $e_i^*(e_j) = 0$ pour $i \neq j$ et $e_i^*(e_i) = 1$, est appelée forme linéaire coordonnée d'indice i.

Proposition - Définition 2.2 Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$.

Corollaire 2.3 On a $\dim E = \dim E^*$.

Remarque 2.4 Pour tout $\phi \in E^*$, $\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi(e_i) e_i^*$.

Exemple 2.5

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en a

Alors : $df(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) \, dx_i$ où $dx_i = e_i^*$

← application à ajouter : théorème de Riez

2. Bidual et base antéduale

Théorème 2.6 Soit $x \in E$, alors $f : E \longrightarrow E^{**}$, $x \longmapsto \varphi_x$ est un isomorphisme, où $\varphi_x : \varphi \in E^* \longmapsto \varphi(x)$.

Remarque 2.7 Il s'agit d'un isomorphisme canonique, on convient alors d'identifier E à E^{**}.

Définition 2.8 On appelle bidual de E, E^{**} le dual de E^*.

Proposition 2.9 Soit $(f_1, \dots, f_n)$ base de E^*. Il existe alors une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $e_i^* = f_i$.

Définition 2.10 On se place sous les hypothèses de la proposition précédente, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est appelée base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$.

III - Orthogonalité et dualité

1. Orthogonal [Gou]

Définition 3.1 Des éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux, si $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle = 0$.

Si $A \subset E$, on définit $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$, appelé orthogonal de A.

Si $B \subset E^*$, on définit $A^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in E^*, \varphi(x) = 0\}$, appelé orthogonal de B.

Remarque 3.2 L'ensemble $A^\perp$ est un s.e.v. de E^* et l'ensemble B° est un s.e.v de E.

Proposition 3.3

- Soit F un s.e.v de E alors $\dim F + \dim F^\perp = n$ et $(F^\perp)^\circ = F$
- Soit G un s.e.v. de E^* alors $\dim G + \dim G^\circ = n$ et $(G^\circ)^\perp = G$

Corollaire 3.4 Soient p formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ telles que $Rg(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = R$. Alors $F = \{x \in E \mid \forall i, \varphi_i(x) = 0\}$ est de dimension $n - R$.

Réciproquement, soit F un s.e.v. de dimension q, il existe $n-q$ formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ telles que $F = \bigcap \ker \varphi_i$.

2. Application transposée [Gou]

On considère E, F $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition 3.5 Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit l'application transposée ${}^t u \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ par : ${}^t u : \varphi \in F^* \longmapsto \varphi \circ u$.

Proposition 3.6 Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ alors :

- $Rg\, u = Rg\, {}^t u$
- $\mathrm{Im}\, {}^t u = (\ker u)^\perp$
- $\ker {}^t u = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$

Proposition 3.7 Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{B}$ base de E et $\mathcal{B}'$ base de F. Alors, on a : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*}({}^t u) = {}^t \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$.

Proposition 3.8 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et G un s.e.v. de E. Alors G est stable par u si et seulement si $G^\perp$ est stable par ${}^t u$.

Application 3.9 Soit $(u_i)_i$ une famille d'endomorphismes trigonalisables commutant deux à deux. Alors $(u_i)_i$ est une famille cotrigonalisable.

développement 2

Proposition 3.10 Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ alors ${}^t(v \circ u) = {}^tu \circ {}^tv$.

Proposition 3.11 Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de E et $P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$. On obtient alors : $P_{\mathcal{B}^* \to \mathcal{B}'^*} = {}^tP^{-1}$

Application 3.12 Connaissant $\mathcal{B}^*$, on peut déterminer la base antéduale $\mathcal{B}$.